Некоторые тенденции современного школьного математического образования

А.Г. Рубин

Данная статья ни в коей мере не претендует на полноту или всесторонность исследования по названной теме. Здесь представлены лишь некоторые наблюдения и размышления автора. Речь в них будет идти и о начальной, и о средней школе.

В последние годы все больше внимания уделяется не только и не столько конкретным знаниям, сколько умению применять их в разных обстоятельствах – как учебных, так и жизненных. А это требует совсем другой организации учебного процесса. Для того чтобы знания воспринимались во всей глубине, неформально, они должны быть не просто получены, а самостоятельно открыты ребенком. Именно на этом принципе основывается преподавание в Образовательной системе «Школа 2100», в других развивающих системах.

Однако названная тенденция относится не только к математическому образованию, но к школьному образованию в целом, поэтому, несмотря на всю ее важность, мы будем говорить не о ней.

Коснемся **важнейшей новации самого последнего времени: включения в программу по математике основной школы элементов теории вероятностей и статистики**. Если комбинаторика и бином Ньютона присутствовали в программе средней школы еще во второй половине XIX века и с тех пор неоднократно исключались из нее и опять включались, то элементы теории вероятностей и статистики появляются в средней общеобразовательной школе впервые. Впрочем, справедливости ради заметим, что это появление не то что неизбежное и своевременное, а даже несколько запоздалое. Решающую роль в том, будут ли эти разделы успешно восприняты школьниками, сыграет не только методическое обеспечение преподавания, но и ряд других обстоятельств, скажем, насколько к этому окажутся подготовленными школьные учителя и насколько продуманно и ответственно будет организована их учеба (курсы повышения квалификации и т.д.).

Наряду с безусловной значимостью новых разделов, лишь недавно включенных в школьную программу, особенно приятно отметить, что **в последнее время стали заметны признаки более глубокого и содержательного подхода к традиционным вопросам школьной математики**, и эти тенденции нельзя не приветствовать как чрезвычайно перспективные и плодотворные. Именно этим тенденциям мы уделим первостепенное внимание в настоящей статье.

Рассмотрим подробно некоторые конкретные проявления этих тенденций, все четче и четче просматривающиеся в последние годы.

1. Попытки преодоления формализма в усвоении основных математических понятий.

Серьезнейший бич любого, в том числе и математического, образования – то, что обычно называется формальным усвоением понятий, идей, методов и приемов решения задач. Учащиеся, находящиеся на уровне формального усвоения материала, теряются, встретив хорошо им известную, тщательно разобранную и изученную задачу в формулировке, хотя бы незначительно отличающейся от привычной. Между тем свободное владение каким-либо разделом учебной дисциплины предполагает, кроме прочего, знание и понимание взаимосвязей изученных в ней вопросов с другими вопросами, в частности, с относящимися к другим разделам и даже другим дисциплинам, а также умение узнавать характерные для данного раздела конструкции в самых различных и необычных ситуациях.

Разумеется, для неформального усвоения учебного материала необходимо специально разработанное методическое сопровождение, включающее соответственную систему упражнений и скоррелированную с ней систему контроля – набор тестов, как стимулирующих узнавание, так и провоцирующих неузнавание изучаемых конструкций в разнообразных ситуациях, чтобы в конце концов добиться от учащихся их уверенного узнавания, несмотря на возможные «помехи».

Например, ученик должен отчетливо понимать, что знать необходимо не только формулы, но и области применения каждой из них. Мало осознавать это – надо приучиться воспринимать формулу не саму по себе, а только вместе с областью ее применения. Преподавателям нужно предпринять массу усилий, рассмотреть достаточное количество примеров для формирования и закрепления такой точки зрения.

Еще одной проблемой при изучении формул является несимметричность прочтения многих из них. Этот эффект возникает в ситуациях, когда области определения левой и правой частей формулы не совпадают (неабсолютные тождества). В частности, может оказаться, что при прочтении (использовании) формулы в одном направлении область определения расширяется, а в другом – сужается. Если использовать такую формулу при решении уравнения, то в случае расширения области определения возможно появление посторонних корней, что не представляет особых сложностей, поскольку их можно отсечь, выполнив проверку (которая к тому же во многих типах уравнений все равно делалась бы, так как является необходимой составной частью решения). Если же формула будет использована с сужением области определения, то возможна потеря корней, причем иногда с катастрофическим исходом, поскольку бывают ситуации, когда последствия такого шага не поддаются никакому исправлению. А поскольку наше восприятие устроено так, что «по умолчанию» предпочитает прочтение слева направо, то при изучении формул нужно учитывать это обстоятельство. Типичные примеры: вид формулы «произведение корней равно корню из произведения» лучше, чем наоборот; «сумма логарифмов равна логарифму произведения» лучше, чем наоборот. И, разумеется, абсолютно недопустимо применение такого рода формул без четкого понимания, когда их можно использовать без всяких негативных последствий, а когда – нет; в каком направлении использования можно бороться с возникающими негативными последствиями, а в каком – невозможно (или же возможно, но слишком дорогой ценой).

2. Не только общие правила, но и важные мелочи.

Весьма существенную роль при изучении математики (впрочем, как и любой учебной дисциплины, но математики в особенности) играет набор конкретных мелких правил, приемов, удачных наблюдений, во многом упрощающих работу и заметно снижающих риск допущения ошибок. Преподаватели образно называют их «маленькими хитростями». Значение этих «маленьких хитростей» часто недооценивается, о чем свидетельствует хотя бы тот факт, что в большинстве традиционных учебников и учебных пособий они четко не формулируются и остаются как бы между строк. Между тем анализ письменных контрольных работ различного уровня, в том числе вступительных экзаменационных работ по математике, свидетельствует, что огромное количество сбоев происходит именно из-за незнания базовых мелочей – гораздо больше, чем из-за ошибок при решении трудных задач. Наш опыт показывает, что если при изучении математики формулировать «маленькие хитрости» в шутливой, ироничной манере, то они хорошо запоминаются и их использование доводится до автоматизма. В последнее время при написании новых учебников это делается все чаще и чаще.

Хочется подчеркнуть, что новая, не используемая в стандартном школьном образовании расстановка акцентов возможна в самых, на первый взгляд, полно изученных, «избитых» разделах школьной математики. Примером может служить, скажем, эффект исчезновения неизвестной в уравнении или неравенстве. Нередко случается, что учащиеся выпускного класса, готовясь к экзаменам на аттестат зрелости, при повторении темы «Линейные уравнения», казалось бы, знакомой до боли еще со времен шестого класса, вдруг обнаруживают явление, до сих пор ускользавшее от их внимания или краем уха слышанное, но не отработанное до полного понимания. Подавляющее большинство выпускников оказываются в состоянии шока и полной беспомощности. Это производит сильное впечатление и наглядно демонстрирует, что даже в самых простых вещах можно находить глубины и видеть тонкости, не обнаруживаемые даже при длительном знакомстве с предметом. Разумеется, школьники должны узнавать о таких «тонкостях» вовремя, на ранних этапах изучения линейных уравнений. Подобные ситуации должны отрабатываться, а не замалчиваться или упоминаться вскользь, как это было до недавнего времени.

3. Тождественные преобразования как основа математической культуры.

При изучении математики неоднократно воспроизводится цикл: введение того или иного класса выражений, первоначальное знакомство с ним (его освоение), основные свойства (выражаемые, как правило, набором формул и характерных приемов работы с ними), развитие до свободного уровня техники тождественных преобразований данного класса выражений, соответствующие уравнения (как правило, формулы или идеи для простейших уравнений и сведение всех остальных уравнений к простейшим за счет умело выполненных тождественных преобразований – как общеупрощающих, так и целенаправленных, ориентированных на преобразование уравнения к тому или иному стандартному виду). После уравнений изучаются соответствующие системы уравнений, а затем неравенства и системы неравенств. После этого (не во всех темах) рассматриваются содержательные задачи, которые в результате математического моделирования сводятся к уравнениям, неравенствам или их системам.

В рассмотренных цепочках тождественные преобразования играют ключевую роль. Они являются основой для всех других видов деятельности, которые базируются именно на тождественных преобразованиях. При этом в последнее время все более и более осознается, что тождественные преобразования того или иного класса выражений – это не только и не столько математическая, сколько общекультурная знаковая деятельность, особый язык со своими правилами построения и преобразования «слов» и «предложений», из них составленных. Кроме того, чрезвычайно важно понимать, что тождественные преобразования относятся также и к алгоритмической деятельности, без которой трудно представить себе современное интеллектуальное образование. Навыки, приобретенные учащимися при освоении техники тождественных преобразований, неоднократно потребуются им в будущем на занятиях информатикой, физикой, химией и в сходных областях знаний.

Выполнение тождественных преобразований того или иного выражения практически у всех школьников ассоциируется с упрощением этого выражения. В большинстве случаев это действительно так, но при условии, что имеется четкое понимание, что значит «упростить» и какой из двух видов одного и того же выражения разумно считать более простым. Для общего развития полезно знать, что ответ на последний вопрос чаще всего ситуационный, причем зависит он вовсе не от самого выражения, а от его окружения! Именно оно определяет, какой вид выражения более удобный, потому что в конечном итоге преобразованное выражение будет «взаимодействовать» именно с окружением.

Рассмотрим для иллюстрации сказанного простой пример. Возьмем два вида одного и того же выражения: $2a + 2b$ и $2 \cdot (a + b)$ и зададимся вопросом, какой из этих двух видов проще. Ясно, что такая постановка вопроса по отношению к рассматриваемой ситуации достаточно казуистическая – с точки зрения громоздкости оба вида примерно равноценны. Если же вопрос переформулировать функционально: к какому из двух видов следует приводить это выражение, то сразу станет ясно, что ответ зависит от того, что мы должны делать с этим выражением дальше. Если нас ждет сложение, например к рассматриваемому выражению нужно прибавить $5a - 3b$, то лучше записать его в виде $2a + 2b$, а если следующим действием будет деление, например, на $a + b$, то, безусловно, предпочтительнее записать его в виде $2 \cdot (a + b)$. Если же на рассматриваемом выражении решение задачи заканчивается и оно является последним в цепочке преобразований, то любой из видов $2a + 2b$ или $2 \cdot (a + b)$ ничем не лучше и не хуже другого и с одинаковым успехом можно остановиться на любом их них.

Таким образом, необходимо выработать у учащихся умение проводить тождественные преобразования с учетом окружающих выражений, с которыми затем придется «взаимодействовать» преобразуемому выражению. Это умение нужно развивать, не жалея сил и времени, поскольку оно чрезвычайно ценно. Образно выражаясь, можно сказать, что это умение сродни тому, что в игровых видах спорта называется умением видеть поле. Без него нельзя достичь значительных успехов, не говоря уже о высших ступенях мастерства.

Следующий этап в освоении как идеологии, так и техники тождественных преобразований – умение выполнять целенаправленные тождественные преобразования, но не к наиболее простому с точки зрения громоздкости виду, а к такому, который позволяет взглянуть на выражение с определенной, уже хорошо изученной точки зрения, увидеть в нем возможность применения того или иного стандартного приема и т.д. Такие тождественные преобразования чаще всего применяются при решении уравнений и неравенств и при исследовании функций, когда критерием удачности выполняемого шага зачастую оказывается не внешняя простота полученного выражения, а принадлежность его к такому классу выражений, с которыми уже известно, как поступать дальше.

В качестве примера рассмотрим одно из самых важных и часто применяемых школьных тождественных преобразований – выделение квадрата двучлена (называемое также выделением полного квадрата), осуществляемое по формуле $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x + b\,/\,2a)^2 - (b^2 - 4\,ac)\,/\,4a$.

Замена левой части на правую с точки зрения громоздкости кажется явным проигрышем, но с точки зрения успеха при решении огромного количества задач (как элементарной, так и высшей математики) эта замена является величайшим достижением. Общеизвестно, например, что с ее помощью выводится формула для решения квадратного уравнения, строится график квадратичной функции, вычисляется огромное количество интегралов и т.д.

Еще раз подчеркнем, что формированию качественных, устойчивых навыков выполнения тождественных преобразований, достижению полной свободы в их проведении необходимо уделять первостепенное внимание, поскольку это является фундаментом всего здания математики, залогом успешного продвижения в освоении почти всех дальнейших ее разделов, важнейшим элементом не только математической, но и общей интеллектуальной культуры.

4. Замена переменной как универсальный общематематический метод.

По-видимому, одним из самых важных общематематических и, более широко, общекультурных приемов, применяемых при любой знаковой деятельности, является замена переменной. В последние годы такая точка зрения стала общепризнанной благодаря развитию компьютерных технологий, распространенности и доступности компьютерной техники, где идеология замены одного объекта другим осваивается играючи (как бы каламбурно это ни звучало, но в буквальном смысле!) в самом раннем возрасте.

Нельзя сказать, что идея замены переменной при традиционном преподавании школьной математики не использовалась, но, безусловно, она недооценивалась, трактовалась и применялась в обедненном виде (только в уравнениях и неравенствах) и уж никак не культивировалась. В то же время, по нашему глубочайшему убеждению, полноценного знания математики невозможно добиться без выработки абсолютной свободы выполнения замены переменной, без устойчивого умения замечать ее в любых ситуациях и привычно формировать в ситуациях знакомых, без твердого знания стандартных замен (вместе с областью их применения).

Именно формирование всего разнообразия умений и навыков, связанных с заменой переменной, постепенно стало объектом усиленной работы преподавателей математики. На возможности замены переменной фиксируется все больше и больше внимания во всех видах учебной деятельности, при прохождении всех разделов математики. На занятиях тригонометрией при изучении многих формул становится принятым смотреть на них как на возможные замены переменной. Об этом важно говорить, изучая выделение полного квадрата в квадратном трехчлене, а также изучая основные равносильности для иррациональностей или для обратных тригонометрических функций (последнее, пожалуй, – самая эффектная в школьной математике демонстрация того, как примитивная замена переменной как бы «сама собой» решает задачи, которые без ее использования пришлось бы отнести к разряду очень сложных). Полезно говорить об избавлении от иррациональностей как с помощью обычной замены «каждый корень – новая переменная», так и с помощью тригонометрических замен, об универсальной тригонометрической подстановке как методе превращения многих тригонометрических выражений в рациональные и т.д.

Последовательное, настойчивое осуществление такого подхода помогает воспринять математику не как набор отдельных разделов (рациональная и иррациональная алгебра, логарифмы, тригонометрия и т.д.) или тем внутри этих разделов, а как единое здание или организм с тонкой взаимосвязью составляющих его частей, общностью идеологии и методов, возможностями плодотворного использования приемов и формул из одних частей в других, и т.д.

Кроме предоставления учащимся мощнейшего метода решения разнообразных задач школьной математики, выработка умения замечать и проводить замены переменных имеет огромную пропедевтическую ценность. При изучении высшей математики это умение будет применяться неоднократно, буквально на каждом шагу. Оно потребуется и при вычислении пределов, и при интегрировании, и при решении дифференциальных уравнений, и при исследовании рядов на сходимость, и при разложении функций в степенные или тригонометрические ряды и т.д. Можно с уверенностью сказать, что нет ни одного раздела математики – начиная с тех, которые изучаются в младших классах школы и заканчивая самыми современными, разрабатываемыми лишь в последние годы, – где не использовалась бы замена переменных, причем речь идет не просто об использовании этого метода, а о его ключевой роли при решении огромного многообразия задач.

5. Формирование идеи математического моделирования.

Текстовые задачи, задачи на экстремальные значения и некоторые другие ценны прежде всего тем, что постепенно и ненавязчиво формируют идею математического моделирования реальной ситуации с последующим изучением созданной модели и интерпретацией полученных результатов в терминах исходной реальной задачи.

Уже на начальных стадиях обучения математике школьники встречаются с большим количеством текстовых задач. При традиционном школьном преподавании основные типы задач решались по многу раз с небольшими вариациями условия, чтобы в конце концов сформировать и закрепить алгоритм, приводящий к успеху. Сам алгоритм при этом, как правило, в большинстве учебников не формулировался явно, т.е. обучение проводилось по схеме «делай с нами, делай, как мы» со слабой тайной надеждой на «делай лучше нас».

В последнее время все чаще применяется другой подход, основанный на системе опорных задач, представляющих собой математические модели самых распространенных в данном разделе ситуаций, неоднократно воспроизводящихся в более сложных ситуациях. Опорные задачи играют в некоторых вопросах школьной математики (особенно в геометрии и текстовых задачах) такую же роль, какую в других разделах (например, в тождественных преобразованиях, решении уравнений, технике дифференцирования) играют формулы и правила.

При изучении определенного типа текстовых задач (задачи на движение, на работу, на проценты и т.д.) четко формулируются постановки опорных задач, рассматриваются и выучиваются (на таком же уровне владения, на котором принято выучивать формулы) их решения, развивается умение видеть опорные задачи в условиях более сложных текстовых задач, а также умение разбивать данную текстовую задачу на несколько блоков, каждый из которых является опорной задачей или легко сводится к ней. Такой подход хорошо зарекомендовал себя и позволил достичь значительных успехов в освоении темы, традиционно считающейся одной из самых сложных в школьной математике.

Значительное внимание в преподавании темы «Текстовые задачи» должно уделяться задачам, где количество неизвестных больше количества уравнений. Эти задачи чрезвычайно важны, так как, во-первых, они часто возникают в различных ситуациях не только внутри самой математики, но и в физике, химии и других областях знания, а во-вторых, при построении математических моделей реальных жизненных ситуаций недоопределенность – распространенное явление, и нужно уметь работать в таких условиях и пытаться «выжать» из модели максимум информации, несмотря на неполноту исходных данных. Заметим также, что во многих случаях недоопределенность является кажущейся, так как связи между используемыми в модели величинами на самом деле более глубокие, чем это бросается в глаза при первом грубом моделировании, и их удается найти, только «повозившись» с грубой моделью и изучив простые закономерности. Тенденция уделять адекватное внимание рассматриваемым типам текстовых задач в последнее время становится все более заметной.

***Александр Григорьевич Рубин** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Московской государственной академии тонкой химической технологии, г. Москва.*