Содержательные экстремальные задачи

А.Г. Рубин

По-видимому, наиболее интересными и захватывающими из школьных задач являются содержательные экстремальные задачи. Решение почти каждой из них представляет собой маленькое исследование с красивой постановкой вопроса, со своей интригой, неочевидностью, а иногда и полной неожиданностью ответа. Здесь имеет место применение математического моделирования к реальным ситуациям, что всегда чрезвычайно важно и к тому же часто ещё и эстетически выразительно. С помощью скромного набора средств удаётся поставить и решить сложные и интересные проблемы.

Прежде чем рассматривать конкретные примеры, напомним, что **решение содержательной экстремальной задачи** чётко разделяется на **два этапа**.

Первый этап заключается в построении математической модели описанной в задаче ситуации и дальнейшем преобразовании этой модели к стандартному виду. В конечном итоге должна получиться задача нахождения экстремального значения функции одной переменной на некотором множестве. В средней школе этим множеством почти всегда является интервал – конечный или полубесконечный, включающий крайние точки или нет. Очень редко множество может представлять собой объединение нескольких интервалов.

Именно первый этап наиболее сложен, интересен, разнообразен, требует иногда нестандартных подходов, и именно он вызывает наибольшие трудности при изучении данного класса задач. **Второй этап**, как правило, не представляет идейных трудностей, хотя технически может быть весьма непростым, требующим большого объёма работы, а зачастую и изобретательности в преобразованиях.

Что касается первого этапа, то он тоже поддаётся формализации, разбиению на последовательность необходимых обязательных шагов, которую учащийся должен ясно представлять. Однако вместе с тем эта формализация носит лишь направляющий или рекомендательный характер, т.е. можно с самого начала указать, в чём упомянутые шаги заключаются, **что** должно быть на каждом из шагов сделано, но **как** это должно быть сделано, надо придумывать в каждой конкретной задаче, исходя из её специфики. Вкратце **стандартная последовательность шагов** первого этапа решения содержательной экстремальной задачи следующая:

1) абсолютно отчётливо выяснить, какая величина должна принимать экстремальное значение; это будет исследуемая нами функция;

2) выразить эту функцию через данные задачи, а также через величины, отсутствующие в условии (т.е. переменные), введя их в нужном количестве;

3) если исследуемая функция зависит от нескольких переменных (а чаще всего, за исключением совсем простых задач, так и бывает), то нужно, обнаружив связи между переменными, выразить их через одну-единственную переменную, поскольку изучаемые в средней школе методы позволяют исследовать на экстремум только функции одной переменной*;

4) найти множество изменения той единственной переменной, через которую оказалась выраженной исследуемая функция; для этого нужно выявить и выписать ограничения на переменные (причём на все переменные, а не только на ту единственную, к которой всё свелось в итоге!) и решить полученную систему неравенств.

О том, в каких случаях разумно отойти от описываемого стандарта и

*Здесь в пропедевтических целях уместно отметить, что, когда школьники станут студентами первого курса вуза, они научатся исследовать на экстремум также функции двух и большего количества переменных, т.е. дать, пользуясь случаем, предварительное представление о важном в математическом анализе понятии условного экстремума. – *Здесь и далее прим. автора.*

как это сделать, будет сказано позже.

В результате реализации программы, описанной шагами 1)–4), задача сведётся к нахождению экстремального значения функции одной переменной на известном множестве, т.е. завершится первый этап по нашей классификации и начнётся второй.

Изложенный стандарт для первого этапа сначала отрабатывается на несложных задачах и задачах средней трудности, а затем рассматривается ряд тонкостей. В пункте 1) стандарта иногда, «абсолютно отчётливо выяснив, какая величина должна принимать экстремальное значение», тем не менее приходится признать, что гораздо удобнее и проще в качестве исследуемой функции брать не эту величину, а какую-нибудь другую, чаще всего удачно подобранную монотонную функцию от интересующей нас величины. Скажем, если интересующая нас величина представляет собой квадратный корень из некоторого неотрицательного выражения, то в качестве исследуемой функции удобно взять подкоренное выражение (при обосновании такого выбора вполне достаточно «наивной» аргументации в стиле: «квадратный корень тем больше, чем подкоренное выражение больше»). Или если интересующая нас величина является острым углом, то в качестве исследуемой функции можно взять какую-нибудь тригонометрическую функцию этого угла; при этом важно верно учесть тип монотонности и, соответственно, возможное изменение типа экстремума. Например, если взят косинус угла, то «наивная» аргументация дальнейших рассуждений будет такова: «острый угол тем больше, чем его косинус меньше», и в результате задача, скажем, на наименьшее значение превратится в задачу на наибольшее значение для таким образом выбранной функции.

Комментируя пункт 2) стандарта, нельзя не отметить, что выбор переменных, через которые выражается исследуемая величина, неоднозначен, и от того, насколько удачно он сделан, зависит, насколько велики будут трудности дальнейшей работы – как в последующих пунктах первого этапа, так и на втором этапе решения задачи. На определённой стадии изучения содержательных экстремальных задач полезно сознательно пробовать работать с различными наборами переменных, сравнивая их достоинства и недостатки, имея целью выработать определённое чутьё, интуицию. При этом нужны и некоторые полезные декларативные советы. Например, при решении экстремальных (как, впрочем, и вычислительных) геометрических задач большинство учащихся берут в качестве переменных линейные величины и пренебрегают угловыми, хотя часто решение оказывается гораздо более простым при использовании угловых переменных. По-видимому, психологически это объясняется некоторым страхом перед тригонометрией, неизбежно появляющейся при работе с угловыми переменными. Большинство учащихся, не работавших целенаправленно над своим математическим образованием, воспринимают тригонометрию с гораздо более низким уровнем комфортности, чем алгебру.

По поводу пункта 3) следует отметить (и проработать на достаточном количестве примеров при обучении!), что при выражении одних переменных через другие будут получаться выражения различного уровня сложности, в зависимости от того, какие именно переменные через какие другие выражаются, и здесь дальнейшее количество работы зависит (иногда существенно) от удачного выбора.

Что касается нахождения множества изменения той единственной переменной, через которую оказались выраженными все остальные и, в конечном итоге, исследуемая функция, т.е. содержания пункта 4), то здесь, как уже отмечалось выше, важно помнить, что необходимо исследовать ограничения на все введённые переменные, потому что ограничения на каждую переменную, в силу того что она выражается через оставшуюся единственную, приведут, после преобразований, к ограничениям на ту самую единственную переменную, с которой мы и будем в итоге работать на втором этапе решения задачи. Ещё следует отметить, что нахождение ограничений иногда представляет собой весьма непростую проблему, особенно в некоторых стереометрических экстремальных задачах. В некоторых случаях, видя, что нахождение ограничений вызывает существенные трудности и даже после длительного размышления не возникает никаких плодотворных идей по поводу их преодоления, полезно применить следующий приём (по сути дела, «обходной манёвр»): использовав не все, а лишь очевидные ограничения (и тем самым расширив множество изменения переменной), решать задачу дальше и, найдя точки нужного экстремума, убедиться, что для них описанная в исходной задаче ситуация реализуется (как принято говорить в средней школе, «они подходят по условию задачи»). Заметим, что данный приём будет безусловно корректным, если заранее известно, что множество изменения переменной – открытое, хотя часто его можно применять и для множеств, не являющихся открытыми, проведя соответствующее обоснование.

Среди содержательных экстремальных задач наиболее распространены геометрические. Они достаточно хорошо известны, нередко имеют прикладную ценность и не очевидный a priori ответ. Например: «В конус, радиус основания которого R и высота H, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую площадь полной поверхности. Найти радиус цилиндра» (№ 244, с. 295)* или «Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?» (№ 317, с. 154). В силу консерватизма в преподавании условия многих таких задач без изменения взяты из старых учебников, и их формулировки нечётки, а иногда и не совсем корректны: «Из всех прямоугольников, вписанных в окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади» (№ 324, с. 155) или «Около данного цилиндра нужно описать конус наименьшего объёма (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают). Как это сделать?» (№ 245, с. 295). Это обстоятельство нам представляется скорее позитивным, чем наоборот, так как даёт замечательный повод обсудить эту нечёткость или некорректность формулировки, вместе со слушателями сформулировать задачу абсолютно чётко и корректно и, самое главное, сделать вывод, что когда экстремальная задача встречается в реальной жизни, то значительные усилия зачастую тратятся именно на то, чтобы дать её корректную формулировку, и это является одной из необходимых и важных составляющих частей математического моделирования.

Вообще при преподавании рассматриваемой темы опытный педагог, решая, казалось бы, самую примитивную задачу из стандартного школьного учебника, найдёт немалое количество поводов поговорить о далеко идущих её обобщениях (выходящих иногда за рамки не только школьной, но и традиционной вузовской математики). Было бы не просто неправильным, а даже преступным этим поводом не воспользоваться – аудитория в данный момент особенно восприимчива к заинтересованному восприятию этих обобщений. Невозможно представить себе более благоприятную ситуацию для такого рода деятельности.

Возьмём, скажем, одну из начальных задач рассматриваемой темы (перед ней идут только две задачи – дублёры друг друга, т.е., по сути, одна задача в двух экземплярах) в уже упоминавшемся стандартном школьном учебнике по алгебре и началам математического анализа под редакцией А.Н. Колмогорова: «Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?» (№ 313, с. 154). Решив эту простую задачу (как известно, наибольшую площадь из всех прямоугольников с данным периметром имеет квадрат), было бы уместно сформулировать изопериметрическую проблему в общем виде, предложить слушателям

* Все условия экстремальных задач взяты из наиболее распространённого школьного учебника для 10–11-го классов «Алгебра и начала математического анализа» под редакцией А.Н. Колмогорова (М.: Просвещение, 1997). Номера задач и страницы указаны по 6-му изданию.

проверить их геометрическую интуицию, попытавшись угадать, какая именно фигура даёт ответ (намекнув, если требует ситуация, что это хорошо известная слушателям фигура)*.

Далее естественно перейти к видоизменению изопериметрической проблемы для случая примыкания к прямой, рассмотрев её сначала для прямоугольника и взяв формулировку из того же стандартного школьного учебника: «Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трёх сторон металлической сеткой длиной 200 м, и площадь её при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?» (№ 11.3б, с. 168)**. Решение этой задачи очень похоже на решение предыдущей (№ 313), слушатели легко получат его самостоятельно (тут же, в аудитории, под контролем преподавателя). Однако предварительно, перед тем как будет найдено решение, поучительно, как и ранее, предложить проверить свою геометрическую интуицию, попытавшись заранее спрогнозировать ответ. При этом рекомендуется выписать версии, выдвинутые слушателями, на доске и затем сравнить их с полученным ответом. (Как известно, решением рассматриваемой задачи является прямоугольник, у которого сторона, примыкающая к стене здания, в два раза длиннее, чем сторона, перпендикулярная стене.)

Затем можно попросить слушателей сформулировать аналогичную задачу в общем виде и выдвинуть гипотезы по поводу её возможного решения (при необходимости принимая участие в дискуссии и направляя её в нужное русло). После обсуждения рассмотренных вариантов и предположений слушатели с интересом и вниманием воспримут формулировку проблемы (известной в математике под названием «задача Дидоны») и её решение. Особенно ценно будет, если и формулировка, и ответ будут найдены самими слушателями в процессе состоявшейся дискуссии.

Приведём формулировку задачи Дидоны: «Частью границы фигуры может быть заданная прямая, а оставшаяся часть границы имеет фиксированную длину. Какова должна быть эта часть границы, чтобы фигура имела максимальную площадь?». Решением задачи Дидоны является полукруг, диаметр которого лежит на заданной прямой. Как и изопериметрическая проблема, данная задача не изучается в традиционных вузовских курсах высшей математики.

Название задачи восходит к следующей легенде. Сестра финикийского царя Дидона, спасаясь бегством, прибыла к североафриканскому берегу и упросила местного царя продать ей немного земли. Тот, чтобы отделаться от просительницы, назначил ей огромную сумму за участок, который можно покрыть (или ограничить) воловьей шкурой. Это условие было, однако, принято: заплатив требуемые деньги, хитроумная финикиянка разрезала шкуру на тоненькие полоски, связала из них длинную верёвку и огородила ею большой участок, примыкавший к берегу моря (прямолинейному в том месте). Здесь и возник впоследствии знаменитый Карфаген.

Наконец, можно коротко побеседовать о дальнейшем обобщении задачи Дидоны – если фигура примыкает не к прямой, а к ломаной, дуге окружности, параболе или вообще произвольной линии. Так мы незаметно, начиная с простых школьных задач, выходим на актуальные проблемы современной математики, иные из которых пока не имеют точного решения. Здесь же стоит рассказать о приближённых методах решения экстремальных задач, играющих важнейшую роль на современном этапе, так как для многих из них точные методы неизвестны, а актуальность задач очень высока, в буквальном смысле диктуется самой жизнью.

* Изопериметрическая проблема заключается в нахождении фигуры наибольшей площади при фиксированной длине ограничивающей её линии. Решением изопериметрической проблемы является круг. Полное решение изопериметрической проблемы не рассматривается даже в традиционных вузовских курсах высшей математики.

** К сожалению, авторы учебника под редакцией А.Н.Колмогорова поместили условие этой задачи не вскорости после предыдущей, а даже в другом разделе, что внимательный читатель, вероятно, заметил по номерам страниц – 154 у первой и 168 у второй.

Аналогично тому, как мы рассмотрели выше вариации на тему изопериметрической проблемы со всевозможными обобщениями и ответвлениями, можно предложить много других, столь же захватывающих сценариев, отправной точкой в которых является задача из стандартного школьного учебника. Профессионал, безусловно, оценит с этой точки зрения возможности, предоставляемые (очень интересной и самой по себе!) задачей: «Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населённый пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населённого пункта?» (№ 320, с.154), или её задачей-дублёром: «Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки *A* берега. Пассажир лодки желает достигнуть села *B*, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от *A* (участок *AB* берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?» (№ 321, с. 154–155).

Ещё бóльшие возможности для обобщений и экскурсов в смежные области математики заложены в задаче о наилучшем обзоре: «Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (т.е. чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?» (№ 240, с. 295), и её задаче-дублёре (№ 241, с. 295, условие для краткости не приводим).

Наконец, нельзя пройти мимо возможности поговорить, хотя бы кратко, о том, какую важную роль играют экстремальные задачи в современном естествознании. Начать эту беседу лучше всего, по-видимому, с принципа распространения света, сформулированного Ферма. В уже неоднократно упоминавшемся школьном учебнике под редакцией А.Н. Колмогорова этот принцип приведён (правда, не в основном тексте и не в упражнениях, а в приложении «Сведения из истории») в следующем виде: «Луч света распространяется так, что время его прохождения будет наименьшим» (с. 158). Далее кратко говорится, что закон отражения света (угол отражения равен углу падения) является следствием из этого принципа (без всяких пояснений). Мы рекомендуем остановиться на этом подробно и получить обоснование данного утверждения. Ниже приводится чертёж (рис. 116, с. 158) и формулируется экстремальная задача: «Луч света проходит из точки *M* нижней полуплоскости в точку *N* верхней. Скорость света в нижней полуплоскости (однородной среде) постоянна и равна v_1, а в верхней полуплоскости – v_2. По какому пути должна двигаться точка, чтобы весь её путь занял наименьшее время?» (с. 158). Эта задача вполне по силам «продвинутым» школьникам (в учебнике решения и даже намёка на него нет), её полезно дать в качестве домашнего задания с обсуждением на следующем занятии и продолжением прерванного рассказа. Следствием из полученного решения и будет закон преломления света.

В заключение можно рассказать, что все законы геометрической оптики выводятся из принципа Ферма; таким образом, он является основополагающим для данного раздела науки, и ознакомить слушателей с концепцией, согласно которой все законы природы, аналогично принципу Ферма, могут быть сформулированы в виде экстремальных принципов.

***Александр Григорьевич Рубин** – канд. пед. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Московского государственного университета тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова, автор учебников по математике для 5–11-го классов, г. Москва.*